ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT BÌNH PHƯỚC

NĂM HỌC 2013 – 2014

Lời giải chi tiết và bình luận

Người thực hiện:

ThS. Nguyễn Văn Hoàng

Trường THPT Chuyên Quang Trung – Bình Phước

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH PHƯỚC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2013 - 2014

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 03/10/2013

Câu I:*(THPT:4,0 điểm; GDTX: 4,0 điểm)* Cho hàm số: $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A,B sao cho $AB=\sqrt{2}IB$, với $I(2,2)$.

Câu II:*(THPT:5,0 điểm; GDTX: 6,0 điểm)*

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2}\\(x+y)(x+2y)+3x+2y=4\end{cases}$ $\quad(x,y\in\mathbb{R})$.
2. Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x+3\tan 2x+\sin 4x}{\tan 2x-\sin 2x}=2.$

Câu III:*(THPT:4,0 điểm; GDTX:4,0 điểm)*

1. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(5,-7)$, điểm C thuộc vào đường thẳng có phương trình: $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn AB có phương trình: $3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ dương.
2. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O,R). Gọi P,Q lần lượt là các điểm di động trên cung nhỏ AB, AC sao cho P,Q,O thẳng hàng. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên các đường thẳng BC,AB tương ứng và D',E' lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng BC,AC. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và $D'E'$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KDD' (theo R).

Câu IV:*(THPT:3,0 điểm; GDTX:3,0 điểm)* Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 60^0.

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.
2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DB theo a.

Câu V:*(THPT:2,0 điểm; GDTX:3,0 điểm)* Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Câu VI:*(THPT:2,0 điểm)* Cho dãy số (u_n) được xác định: $\begin{cases}u_1=\dfrac{2}{2013}\\u_n^2(2-9u_{n+1})=2u_{n+1}(2-5u_n),\forall n\geq 1\end{cases}$.

Xét dãy số $v_n=\dfrac{u_1}{1-u_1}+\dfrac{u_2}{1-u_2}+\cdots+\dfrac{u_n}{1-u_n}$. Tìm $\lim v_n$.

------------------HẾT------------------

CÂU I. KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Câu I: *(THPT:4,0 điểm; GDTX: 4,0 điểm)* Cho hàm số: $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó cắt đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho $AB = \sqrt{2}IB$, với $I(2,2)$.

Lời giải. 1) HS tự làm.

2) Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \in R\backslash\{2\}$.

Gọi $M\left(m; \dfrac{2m-3}{m-2}\right) \in (C)$

PTTT của (C) tại M là $y = -\dfrac{1}{(m-2)^2}x + \dfrac{2m^2-6m+6}{(m-2)^2}$

Vì $AB = \sqrt{2}IB$ và tam giác AIB vuông tại I nên IA = IB. Do đó hệ số góc của tiếp tuyến $\left[\begin{array}{l} k = 1 (L) \\ k = -1 \end{array}\right.$

$k = -1 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{(m-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$

Suy ra có hai phương trình tiếp tuyến: $y = -x + 2$; $y = -x + 6$.

Nhận xét. Nếu HS không nhận thấy rằng vì $AB = \sqrt{2}IB$ và tam giác AIB vuông tại I nên IA = IB. Do đó hệ số góc của tiếp tuyến $\left[\begin{array}{l} k = 1 (L) \\ k = -1 \end{array}\right.$ thì HS có thể làm theo phương pháp vẫn hay dùng khi xét các giao điểm của tiếp tuyến với hai tiệm cận (hoặc hai trục tọa độ) đó là tìm tọa độ A và B theo x_0 và sử dụng $AB = \sqrt{2}IB$ để có phương trình giải x_0.

Đây là bài toán cho điểm và nếu HS thấy đặc điểm của tam giác IAB vuông cân thì không mất nhiều thời gian, có thể có thời gian để xử lý các bài toán sau này.

Một số bài toán tương tự như sau:

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Tìm những điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B sao cho AB có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. **Ta có** $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \in R\backslash\{2\}$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C)$

PTTT của (C) tại M là $(d): y=-\dfrac{1}{\left(x_0-2\right)^2}x+\dfrac{2x_0^2-6x_0+6}{\left(x_0-2\right)^2}$

Giao điểm của d với đường tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.

Giao điểm của d với đường tiệm cận ngang là $A\left(2x_0-2;2\right)$.

Khi đó $AB^2=4\left((x_0-2)^2+\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right)\geq 8.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm $M_1(1;1),M_2(3;3).$

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}(C).$ Tìm những điểm trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại điểm đó cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất, I là giao điểm hai đường tiệm cận.

HD. Để ý rằng $IA+IB+IC=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq 2\sqrt{IA.IB}+2\sqrt{IA.IB}$, trong đó $IA.IB=12$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi IA = IB. Đáp số $M_1(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}),M_2(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}).$

CÂU 2A. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 & (2) \end{cases}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

Nhận xét. *Khi xét hệ này rõ ràng các phương pháp thế hay đặt ẩn phụ là không thành. Nhìn vào PT(1) đây là PT đối xứng, ta nghĩ đến đưa về tổng và tích, nhưng PT(2) không phải là PT đối xứng. Lúc này ta lại nghĩ đến trục căn thức và xuất hiện nhân tử x – y, và hệ không có nghiệm x = y. Sau đó ta đưa về hệ tạm*

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=\dfrac{4}{x-y} \end{cases}$$

Đến đây việc tìm x hoặc y trở nên khó khăn. Vì vậy ta chuyển việc biến đổi sang PT(2). Đây là phương trình bậc hai nếu xem một ẩn là tham số, ta thử lập Δ *cho phương trình này khi xem x là ẩn và y là tham số ta được phương trình* $x^2+(3y+3)x+2y^2+2y-4=0$. *Phương trình này có* $\Delta=y^2-10y+25=(y-5)^2$. *Đến đây con đường này chắc chắn khả thi.*

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ y \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^2+(3y+3)x+2y^2+2y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+2y+4=0 \end{array}\right.$

Trường hợp $x+2y+4=0 \Leftrightarrow x=-4-2y$, kết hợp với điều kiện $y \ge -\dfrac{1}{2}$ ta có $x \le -3$. Điều này trái với điều kiện của *x*. Hoặc có thể thấy với $\begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ y \ge -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ thì $x+2y+4>0$.

Trường hợp $x=1-y$, ta có

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x+y)^2-4xy}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)+2+2\sqrt{4xy+2(x+y)+1}=\left(\frac{(x+y)^2-4xy}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3}=(4xy+3)(4xy-5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4xy+3=0 \\ (4xy-5)\sqrt{4xy+3}=8\ (L)\quad (do\ 1=(x+y)^2\geq 4xy\Rightarrow 4xy-5<0) \end{array}\right.$$

Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right),\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Xét bài tập tương tự như sau:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x-3}=(2y^2+11)(17-y)+\sqrt{y} & (1) \\ y(y-3x+3)=5(3x+2) & (2) \end{cases}$		$x,y\in\mathbb{R}$

Đối với bài này thì thấy ngay xử lý PT(2) là khôn ngoan nhất.

Điều kiện: $\begin{cases} x\geq \dfrac{3}{4} \\ y\geq 0 \end{cases}$

$$(2)\Leftrightarrow y^2+(3-3x)y-15x-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-5\ (L) \\ y=3x+2 \end{array}\right.$$

Thay $y=3x+2$ vào PT(1) ta được

$$\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x+2}+5(x-5)(18x^2+24x+19)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}+5(x-5)(18x^2+24x+19)=0$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất x = 5 vì $x\geq \dfrac{3}{4}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (5; 17).

CÂU 2B. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x + 3\tan 2x + \sin 4x}{\tan 2x - \sin 2x} = 2 \ (1)$

Đây là câu dễ nhất trong đề thi lần này.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \tan 2x - \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 3\sin 2x + \tan 2x + \sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin 2x\cos 2x + \sin 2x + \sin 4x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\cos 2x + 1\right)\left(\sin 2x + \sin 4x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x + 1 = 0 \\ \sin 4x + \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (L) \\ x = k\dfrac{\pi}{2} \quad (L) \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

Phương trình có các họ nghiệm: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Có thể luyện tập qua bài tập sau:

$\tan x\left(\tan x + 2\sin x + 1\right) - 6\cos x = 3 + \sin x\left(1 + \tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right)$

Giải. Đk: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \ (*)$

$pt \Leftrightarrow \tan x(\tan x + 2\sin x + 1) - 6\cos x = 3 + \sin x(\dfrac{\cos x\cos\dfrac{x}{2} + \sin x\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x\cos\dfrac{x}{2}})$

$\Leftrightarrow \tan x(\tan x + 2\sin x + 1) - 6\cos x = 3 + \tan x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x(1 + 2\cos x) - 3(1 + 2\cos x) = 0$

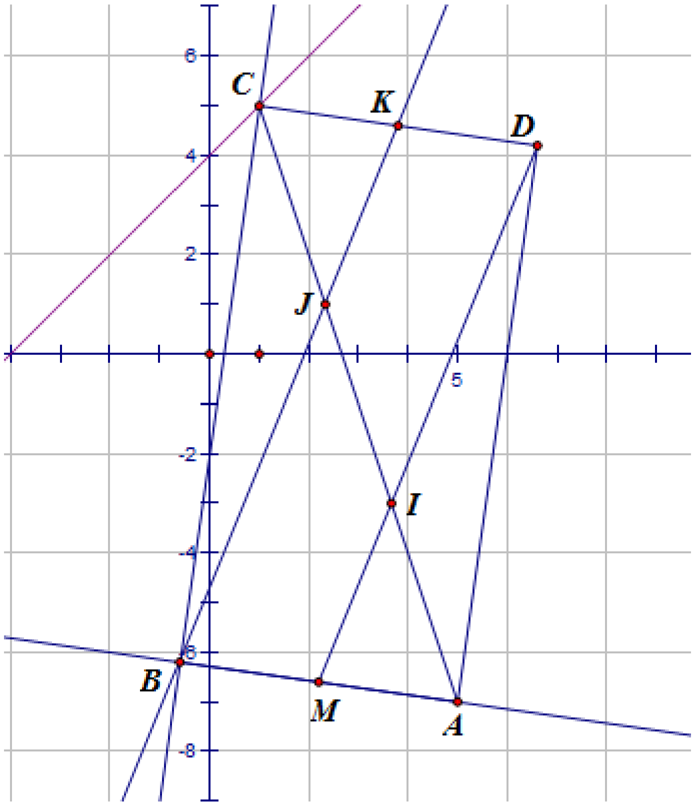
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan^2 x = 3 \\ 1 + 2\cos x = 0 \end{array}\right.$

$\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

Vậy phương trình có 2 họ nghiệm: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

CÂU 3A. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH OXY

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(5,-7)$, điểm C thuộc vào đường thẳng có phương trình: $x-y+4=0$. Đường thẳng đi qua D và trung điểm của đoạn AB có phương trình: $3x-4y-23=0$. Tìm tọa độ của B và C, biết điểm B có hoành độ dương.



Phân tích lời giải nhanh: *Gọi C(c; c + 4), gọi M là trung điểm AB thì DM đã có phương trình. Nếu biểu diễn một điểm nào đó trên DM theo 1 ẩn theo c được thì bài toán xong. Điểm D mà M khó có thể biểu diễn theo c, chỉ có điểm I là giao điểm của DM và AC là được vì A đã có tọa độ và CI = 2IA.*

Lời giải.

Gọi $C(c;c+4)\in d_1$: $x-y+4=0$, M là trung điểm AB, I là giao điểm của AC và d_2: 3x – 4y – 23 = 0. Từ B kẻ đường thẳng song song DM cắt AC và CD lần lượt tại J, K.

Khi đó CJ = IJ = IA. $\Rightarrow CI=2AI \Rightarrow \overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IA} \Rightarrow I\left(\frac{c+10}{3};\frac{c-10}{3}\right)$.

Mà $I\in d_2$ nên ta có: $3\frac{c+10}{3}-4\frac{c-10}{3}-23=0 \Leftrightarrow c=1$

Vậy C(1;5).

Ta có: $M\in d_2 \Rightarrow M\left(t;\frac{3t-23}{4}\right) \Rightarrow B\left(2t-5;\frac{3t-9}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(2t-10;\frac{3t+5}{2}\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(2t-6;\frac{3t-19}{2}\right)$

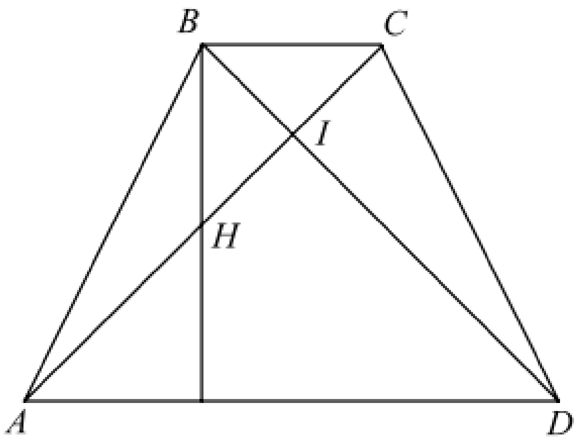
Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow 4(t-5)(t-3)+\frac{1}{4}(3t+5)(3t-19)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{29}{5} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(-3;-3)\ (L) \\ B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right) \end{array}\right. \Rightarrow B\left(\frac{33}{5};\frac{21}{5}\right).$

Bình luận. *Bài này tương tự bài hình khối B 2013 như sau:*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và AD = 3BC. Đường thẳng BD có phương trình x + 2y – 6 = 0 và tam giác ABD có trực tâm là H (-3; 2). Tìm tọa độ các đỉnh C và D.



Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow IB=IC$.

Mà $IB\perp IC$ nên ΔIBC vuông cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICB}=45^{\circ}$.

$BH\perp AD \Rightarrow BH\perp BC \Rightarrow \Delta HBC$ vuông cân tại B

$\Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng HC.

Do $CH\perp BD$ và trung điểm I của CH thuộc BD nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ $\begin{cases} 2(x+3)-(y-2)=0 \\ \frac{x-3}{2}+2\left(\frac{y+2}{2}\right)-6=0. \end{cases}$

Do đó $C(-1;6)$.

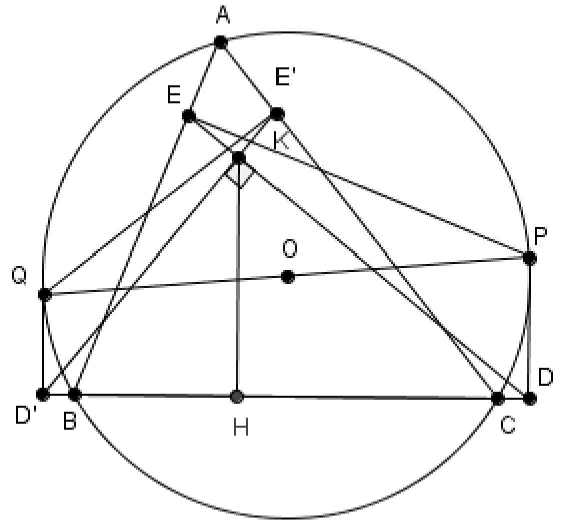
Ta có $\frac{IC}{ID}=\frac{IB}{ID}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{3} \Rightarrow ID=3IC \Rightarrow CD=\sqrt{IC^2+ID^2}=IC\sqrt{10}=\frac{CH\sqrt{10}}{2}=5\sqrt{2}.$

Ta có $D(6-2t;t)$ và $CD=5\sqrt{2}$ suy ra $(7-2t)^2+(t-6)^2=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7. \end{array}\right.$

Do đó $D(4;1)$ hoặc $D(-8;7)$.

CÂU 3B – HÌNH HỌC PHẲNG THUẦN TÚY

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O,R). Gọi P,Q lần lượt là các điểm di động trên cung nhỏ AB, AC sao cho P,Q,O thẳng hàng. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên các đường thẳng BC,AB tương ứng và D',E' lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên các đường thẳng BC,AC. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và $D'E'$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KDD' (theo R).



Nhận xét. *DE, D'E' lần lượt là hai đường thẳng Simson của P và Q đối với tam giác ABC, vì P và Q đối xứng nhau qua O nên góc giữa DE và D'E' bằng 90^0. Do đó tam giác D'KD vuông tại K. Đây là điểm mấu chốt để hình thành nên bài toán này. Tuy nhiên, nếu không biết chúng là các đường thẳng Simson thì có thể dự đoán tam giác D'KD vuông vì bài toán có nhiều yếu tố vuông góc và tam giác vuông thì mới dễ dàng tính diện tích.*

Lời giải.

Tương tự phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng Simson ta tiến hành chứng minh tam giác D'KD vuông tại K.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên BC.

$DKH = DKP$ $(KH \parallel PD)$

$DKP = PBA$ (tứ giác PEBD nội tiếp)

Do đó $DKH = PBA = \frac{1}{2} sd\, PA$.

Tương tự, $D'KH = \frac{1}{2} sd\, AQ$

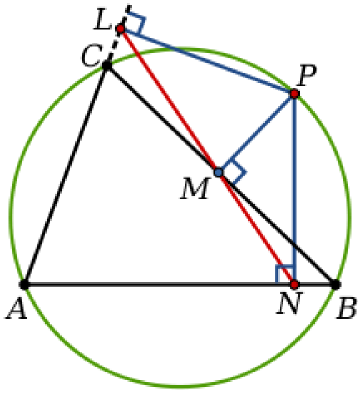
Vậy $DKD' = DKH + D'KH = \frac{1}{2} sd\, PQ = 90^0$ (PQ là đường kính)

Xét hình thang vuông $DPQD'$ vuông tại D và D' nên $DD' \le QP = 2R$, dấu "=" xảy ra khi $PQ // BC$.

Ta có: $S = \frac{1}{2} KD.KD' \le \frac{KD^2 + KD'^2}{4} = \frac{DD'^2}{4} \le \frac{4R^2}{4} = R^2$

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác DKD' bằng R^2 khi $PQ \parallel BC$.

Một số tính chất của đường thẳng Simson ta nên nhớ



- Đường thẳng Simson của đỉnh A của tam giác là đường cao hạ từ đỉnh đó, và đường thẳng Simson của điểm A' đối xứng với đỉnh A qua tâm O là cạnh BC của tam giác.

- Nếu P và P' là các điểm thuộc (O), thì các góc giữa hai đường thẳng Simson của P và P' bằng nửa số đo cung PP'. Trong trường hợp đặc biệt, nếu P và P' đối xứng nhau qua tâm O, thì các đường thẳng Simson của chúng vuông góc với nhau tại một điểm nằm trên đường tròn chín điểm.

- Nếu gọi H là trực tâm của tam giác ABC, thì đường thẳng Simson của P đi qua trung điểm của đoạn PH (trung điểm này nằm trên đường tròn chín điểm).

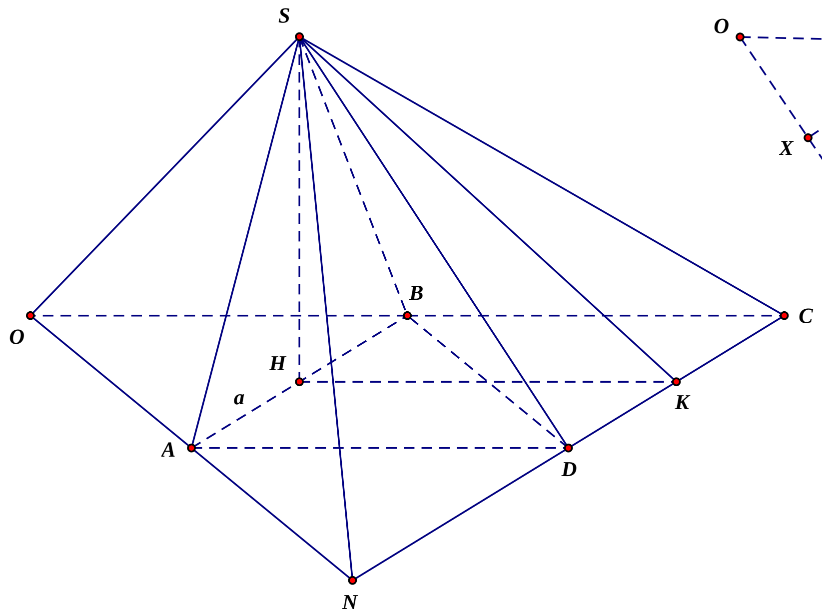
- Nếu hai tam giác cùng nột tiếp (O), thì góc giữa hai đường thẳng Simson lines của một điểm P trên (O) đối với hai tam giác đó không phụ thuộc vào vị trí của P trên (O).

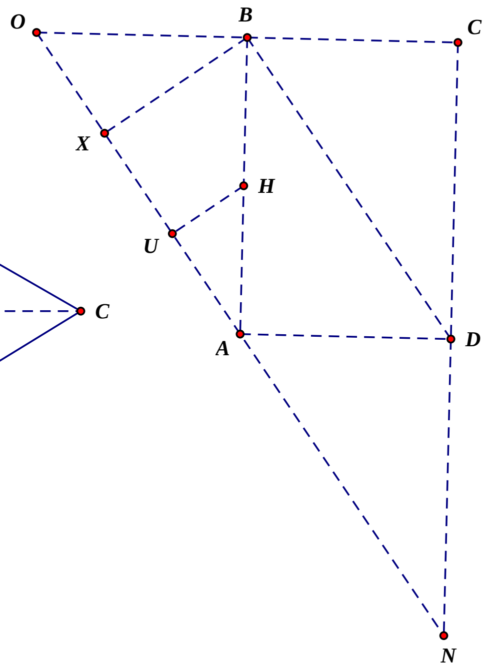
CÂU 4. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng đáy bằng 60^0.

a) Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và DB theo a.





Lời giải.

a) H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD

Khi đó SH là đường cao của hình chóp S. ABCD và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Góc giữa (SCD) và mặt đáy là $SKH = 60^0$. Ta có $BC = HK = \frac{SH}{\tan 60^0} = \frac{a}{2}$. Tính được

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12} \text{ (đvtt)}$$

b) Qua A kẻ đường thẳng song song BD cắt BC và CD lần lượt tại N và O.

Gọi U và X lần lượt là hình chiếu của B trên ON khi đó $BO = \frac{a}{2} \Rightarrow BX = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Gọi T là hình chiếu của H trên SU.

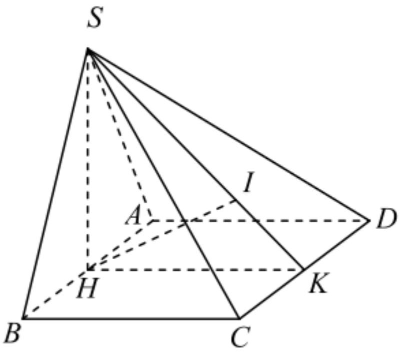
$$d(BD, SA) = d(BD, (SON)) = d(B, (SON)) = 2d(H, (SON)) = 2HT.$$

Ta có $\frac{1}{HT^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HU^2}\Rightarrow HT=\frac{a\sqrt{3}}{8}$. Do đó $d\left(BD,SA\right)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bình luận. *Câu a) là cho điểm, câu b) đòi hỏi HS nắm phương pháp tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau quy về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.*

Bài tập tương tự.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tính của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

	Gọi *H* là trung điểm của *AB*, suy ra $SH\perp AB$ và $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mà (*SAB*) vuông góc với (*ABCD*) theo giao tuyến *AB,* nên $SH\perp(ABCD)$.	**0,25**
	Do đó $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.	**0,25**
	Do $AB \parallel CD$ và $H\in AB$ nên $d(A,(SCD))=d(H,(SCD))$. Gọi *K* là trung điểm của *CD* và *I* là hình chiếu vuông góc của *H* trên *SK*. Ta có $HK\perp CD$. Mà $SH\perp CD\Rightarrow CD\perp(SHK)$ $\Rightarrow CD\perp HI$. Do đó $HI\perp(SCD)$.	**0,25**
	Suy ra $d(A,(SCD))=HI=\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.	**0,25**

CÂU V – BẤT ĐẲNG THỨC

Cho a,b,c ***là ba số dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:***

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}-\frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Bình luận. *Đây là bài bất đẳng thức có tư tưởng giống đề thi ĐH B – 2013.*

Câu 6 (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+4}}-\frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

Câu 6. $a+b+c+2\le\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+4)}$

$3(a+b).\sqrt{(a+2c)(b+2c)}\le(3a+3b).\left(\frac{a+b+4c}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[\frac{4(a+b+c)}{2}\right]^2=2(a+b+c)^2$

Vậy $P\le\frac{8}{a+b+c+2}-\frac{27}{2(a+b+c)^2}$. Đặt $t=a+b+c$, $t>0$; $P\le\frac{8}{t+2}-\frac{27}{2t^2}=g(t)$

$g'(t)=-\frac{8}{(t+2)^2}+\frac{27}{t^3}$

$g'(t)=0\Leftrightarrow 27(t+2)^2-8t^3=0\Leftrightarrow t=6$

t	0		6		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$	

$P\le g(t)\le\frac{5}{8}$; $\max P=\frac{5}{8}$ xảy ra khi $a=b=c=2$.

C

Lời giải.

- $a^2+b^2+c^2+1\ge\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(c+1)^2}{2}=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(c+1)^2\right]\ge\frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

- $(a+1)(b+1)(c+1)\le\left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3=\left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$

- Do đó $P\le\frac{2}{a+b+c+1}-\frac{54}{(a+b+c+3)^3}$

  $=\frac{2}{t}-\frac{54}{(t+2)^3}=f(t)$ với $t=a+b+c+1$ $(t>1)$

$$f^{/}(t) = -\frac{2}{t^2} + \frac{162}{(t+2)^4};\ \ f^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 1 (loai) \end{array}\right.$$

t	1		4		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	0	$\nearrow$	1/4	$\searrow$	0

Giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{4}$ khi $\begin{cases} a+b+c=3 \\ a=b=c \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$